

Prof. Franco Franceschini

E-mail: [franceschini@ilpensierovivo.org](mailto:franceschini@ilpensierovivo.org)

Sito web: [www.francofranceschini.it](http://www.francofranceschini.it)

## UNITA' DIDATTICA 7 – LA DERIVATA

La presente unità didattica sceglie come soggetto l'operatore denominato derivata. La sua denominazione è congeniale al fatto che essa derivi (scende) dal concetto di limite che è stato introdotto nell'unità didattica 6. Storicamente la derivata viene scoperta sia da Newton che da Leibniz e facente parte a quello che oggi viene chiamato calcolo differenziale. I due matematici, che si è dimostrato in seguito abbiano lavorato in modo del tutto autonomo, giunsero al concetto di derivata attraverso strade differenti, ma equivalenti sotto il profilo concettuale. Anche il quesito che dette origine alla scoperta è differente e cioè per Newton la ricerca della velocità istantanea mentre per Leibniz la ricerca dell'equazione della tangente ad una curva continua in un suo punto. Inoltre parteciparono all'idea di limite anche altri pensatori tra i quali Pascal che introdusse il triangolo di Pascal ripreso poi da Newton per la formulazione del concetto di derivata. Un contributo notevole da un punto di vista formale è fondato da Lagrange. Concettualmente la derivata esprime il rapporto di due grandezze entrambe tendenti ad essere molto piccole. Volendo assegnare a questo operatore una forma più comprensibile consideriamo una funzione  $y=f(x)$  continua in ogni suo punto. Indicato con  $h$  un incremento positivo della  $x$  si ha che la funzione passa dal valore  $f(x)$  al valore  $f(x+h)$ . Si è così in presenza di due incrementi:  $\Delta y=f(x+h)-f(x)$  detto incremento della funzione e incremento  $h$  della variabile. Il loro rapporto  $\rho=\Delta y/h$  è detto rapporto incrementale della funzione nel punto  $x$ . Graficamente si consideri la curva  $\gamma$  grafico della  $f(x)$  e i suoi punti  $A$  di ascissa  $x$  e  $B$  di ascissa  $x+h$ . Il rapporto incrementale  $\rho$  esprime la pendenza della corda  $AB$  che coincide con l'ipotenusa del triangolo rettangolo  $ABC$  (Triangolo di Pascal). In tale triangolo  $AC=h$  e  $BC=\Delta y$ . Il rapporto incrementale, una volta fissato il valore  $x$ , è una funzione di  $h$ . La derivata nasce dal passaggio al limite per  $h$  che tende a 0 del rapporto incrementale quando questo limite è finito. La derivata si indica con  $f'(x)$ . In formula:  $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \Delta y/h = L_{\text{finito}}$ . Si noti come sia il numeratore  $\Delta y$  che il denominatore  $h$  tendano entrambi a 0 giungendo alla forma di indecisione  $0/0$  che però attraverso l'operazione di limite viene risolta. Esempio: sia  $f(x)=x^2$ , avremo:  $\Delta y=(x+h)^2-x^2=x^2+h^2+2xh-x^2=2xh+h^2$  da cui  $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} (2xh+h^2)/h = \lim_{h \rightarrow 0} h(2x+h)/h=2x$ . Si dice anche che la funzione derivata della  $y=x^2$  è la funzione  $y'=2x$ . Procedendo analogamente si trovano le funzioni derivate delle funzioni maggiormente utilizzate. Ritornando al richiamo storico Newton indica le variabili  $x$  e  $y$  ecc. come fluenti mentre le derivate come fluitori. Leibniz introduce il concetto di differenziale ponendo quindi  $y'(x)=dy/dx$  (notazione di Leibniz).

Da quanto esposto scende spontanea la seguente considerazione: la derivata è il rapporto di due quantità evanescenti nel senso che esse divengono sempre più piccole sino ad apparentemente svanire mentre invece esse si realizzano in un valore ben definito. Ciò si esprime matematicamente affermando che il passaggio al limite elimina la forma di indeterminazione fornendo il valore finito della derivata. Anche se attualmente tutto ciò viene fatto rientrare nella logica degli infinitesimi, comunque rimane incomprensibile, dal punto di vista deterministico passo passo, il risultato di tale procedimento, fatto che era stato già considerato in relazione al concetto di limite.

Al fine di cogliere il significato anche applicativo della derivata consideriamo le sue due interpretazioni che l'hanno resa particolarmente importante nel campo scientifico:

1. velocità istantanea: in questo caso la variabile  $x$  esprime il tempo mentre la funzione è la legge oraria, quindi  $x=t$  e  $f(x)=s(t)$ . Il rapporto incrementale indica la velocità media, infatti:  $\rho=[s(t+h)-s(t)]/h$  dove  $h$  esprime l'incremento di tempo.  $\rho$  coincide con la definizione di velocità media nell'intervallo di tempo  $h$ . Per velocità istantanea si intende la velocità all'istante  $t$ , cioè per  $h$  che tende a zero. Ciò corrisponde al concetto di derivata della funzione oraria. Quindi  $v=\lim_{h \rightarrow 0}$

$s(t+h)/h$ . Ad esempio se la legge oraria è  $s=t^2$ , la legge del moto, cioè esprime le velocità istantanee è:  $s'(t)=2t$ . Quindi se un punto dopo 5 secondi ha percorso 25 metri la sua velocità istantanea è di  $2*5=10\text{m/s}$  cioè il valore della derivata della funzione  $s(t)$  corrispondente a 5 secondi. Considerazione: nel caso della velocità istantanea è di particolare interesse riflettere sul fatto che il tempo  $t$  venga considerato e gestito come una variabile numerica;

2. tangente a una curva in un suo punto: sia  $\gamma$  il grafico della funzione  $y=f(x)$  e sia  $x$  l'ascissa di un suo punto. Tornando al triangolo di Pascal il rapporto incrementale indica la pendenza della corda sottesa dal punto A di ascissa  $x$  e il punto B di ascissa  $x+h$ . Ritenendo il punto A fisso sulla curva  $\gamma$  e facendo avvicinare quanto si vuole B ad A la corda diviene sempre più piccola e quando B coincide con A  $\Delta y=h=0$  ottenendo la forma di indecisione  $0/0$ . Applicando il passaggio al limite tale indecisione viene risolta fornendo la pendenza della retta tangente alla curva nel punto A. Quindi in tal caso la derivata esprime la pendenza della retta tangente in un dato punto della curva  $\gamma$ . Quindi se  $p(x_0, y_0)$  è un punto della curva  $\gamma$ , l'equazione della retta tangente è:  $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ . In particolare  $f(x)=x^2$  e sia  $p_0(3,9)$  un suo punto.  $f'(x)=2x$ ;  $f'(3)=6$  questo significa che la pendenza della retta tangente alla curva  $y=x^2$  nel suo punto  $3,9$  è uguale a 6. La retta tangente sarà  $y=6x-9$ . Si accenna al fatto che l'operatore derivata occupa un ruolo da protagonista anche nello studio di funzione con risultati interessanti sia sotto il profilo puramente teorico che applicativo special modo nel campo finanziario. Considerazione: anche nel caso della retta tangente si deve sottolineare l'eccezionale apporto della derivata che risolve in modo corretto sia l'aspetto geometrico della corda AB che si trasforma nella retta tangente che il problema analitico passante dallo stato di indecisione relativo al triangolo di Pascal ad una pendenza finita e corretta. Richiamando la grande importanza applicativa della derivata in campo meccanico, geometrico e scientifico in genere si può evincere ancora una volta lo straordinario contributo del passaggio al limite nell'evoluzione del progresso dell'uomo.

Riflessione: la riflessione intende incentrarsi sul ruolo di eccezionale contributo portato dalla derivata in quasi tutti i campi della ricerca e dell'applicazione scientifica. La caratteristica della quale preme sottolineare la particolare valenza risiede nel constatare una specifica attività logica all'interno dell'operazione di derivata che permette di aggirare l'ostacolo della indeterminazione sia nel campo geometrico che fisico. Si vuole ancora sottolineare l'importanza dell'aver assegnato al tempo un carattere matematico. Ciò avvalorava ancora di più quella dimensione mistica che pervade e penetra comunque il percorso scientifico. Si ricorda ancora che i personaggi che hanno contribuito al concetto di derivata Newton, Pascal, Leibniz erano comunque fortemente sorretti e guidati da una solida fede.