

Prof. Franco Franceschini

E-mail: [franceschini@ilpensierovivo.org](mailto:franceschini@ilpensierovivo.org)

Sito web: [www.francofranceschini.it](http://www.francofranceschini.it)

## UNITA' DIDATTICA 6 – IL LIMITE

Questa unità didattica si prefigge di introdurre il concetto di limite per una funzione ad una variabile reale secondo un profilo più descrittivo che analitico non trascurando però il rigore necessario. Diciamo subito che il concetto di limite rappresenta il momento di svolta certamente rivoluzionaria presente nel pensiero speculativo. Esso trova la sua nascita alla fine del diciassettesimo secolo attraverso i due personaggi Newton e Leibniz, anche se altri avevano avuto delle intuizioni piuttosto simili, ma non altrettanto efficaci. Si richiama il significato etimologico del termine limite derivante dal latino limes, -itis proveniente forse da limus che si traduce in obliquo e cioè linea di confine naturale, non retta come quelle artificiali. Per quello che verrà detto in seguito è utile accogliere l'aggancio tra il concetto di naturalità del limite in contrapposizione a quello di linearità quindi semplificazione artificiosa e riduttiva. E' nel carattere di naturalità che risiede quella stravaganza logica che è l'elemento fondamentale del concetto di limite che andiamo a presentare. Mettiamo subito in luce quel qualcosa che ha reso il concetto di limite un fatto rivoluzionario. Ciò consiste nell'aver scambiato nella scrittura matematica il concetto di assumere con quello di tendere. Facendo degli esempi si ha:

1. assegnando alla variabile  $x$  il valore 3 si intende che la  $x$  assume il valore 3. Ciò può essere anche interpretato come fatto che la  $x$  si va a collocare nella posizione assunta dal numero 3 assumendone quindi l'identità. Il concetto di tendere della  $x$  al numero 3 indica come la  $x$  non assume il valore 3, ma valori sempre più prossimi al numero 3 sia per difetto che per eccesso. Tornando al modello precedente la  $x$  non va a collocarsi nella posizione del numero 3, ma gli si avvicina indefinitamente sia da sinistra che da destra. Un altro modo per esprimere questo fatto è affermare che il valore della  $x$  si differenzia per una quantità  $\varepsilon$  positiva e piccola a piacere dal numero 3. Ciò si può scrivere analiticamente  $3-\varepsilon < x < 3+\varepsilon$  dove  $x$  appartiene ai numeri reali. Il fatto rivoluzionario nel contesto del pensiero matematico è aver introdotto la quantità  $\varepsilon$  non definita numericamente, ma solo qualitativamente (piccola a piacere). Generalizzando l'esempio, il numero 3 è detto punto di accumulazione  $c$  dell'operazione tendere a. La scrittura  $c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$  è detta intorno di  $c$  ( $I_c$ ). L'operazione di tendere a  $c$  si esprime con  $x \rightarrow c$  e si può enunciare nel seguente modo: il tendere di  $x$  a  $c$  rappresenta l'assunzione da parte della  $x$  di tutti i valori appartenenti all'intorno di  $c$  escludendo tale valore  $x=c$ . Da questo primo esempio si traggono come già accennato le seguenti considerazioni forti: l'aver concepito il punto di accumulazione come una sorta di attrattore nei riguardi della  $x$  comunque irraggiungibile; aver concepito la quantità  $\varepsilon$  di natura semi numerica. Infatti di essa è stata fornita solo la positività ma non il valore determinato. Alla quantità  $\varepsilon$  è stato assegnato un valore indeterminato piccolo a piacere. Questa caratteristica legata all'arbitrio del pensiero è un elemento di assoluta novità nel calcolo matematico e sottolinea una sorta di collaborazione tra il pensiero e l'algoritmo. E' come se l'algoritmo coincidesse con il pensiero attivo presente nell'operazione di calcolo. Le considerazioni precedenti possono essere unificate nella seguente considerazione: nell'intorno di  $c$  si crea un alone di raggio  $\varepsilon$  nel quale la  $x$  può penetrare perdendo però qualsiasi forma di razionalità, come se uno spirito espresso dal punto di accumulazione la attirasse attraverso un atto di fede. Può essere utile ricordare come Newton indicasse con  $ox$  il piccolo incremento relativo ad  $x$ , mentre Leibniz in modo assolutamente autonomo lo indicasse con  $dx$ . Le quantità  $ox$  venivano definite evanescenti nel senso che in alcuni casi come vedremo è come se vi fosse una sorta di loro "sparizione". Risulta ulteriormente indicativo ricordare che ogni operazione ha un suo risultato. Ci chiediamo nel caso del tendere qual è il risultato corrispondente?

Come si può evincere da quanto detto in precedenza esso non è un valore determinante ma è uno stato di attrazione logica. Anche da qui si evidenzia ancora quell'aspetto rivoluzionario accennato all'inizio;

2. per far ben comprendere la straordinaria efficacia dell'operazione di limite consideriamo quanto segue: sia  $y=x/x$  una funzione reale. Se applichiamo il concetto di assumere ponendo  $x=0$ , otteniamo  $y(0)=0/0$  che non ha significato matematico. Se invece applichiamo il concetto di tendere in tal caso al punto di accumulazione  $c=0$ , si ottiene che la  $x$  non assume il valore 0, ma un qualsiasi valore compreso tra  $-\varepsilon < x < \varepsilon$ . Chiamiamo uno di tali valori  $k$ . In tal caso la funzione diviene  $k/k$ . Essendo  $k \neq 0$  avremo che la funzione tende al numero 1. In scrittura: limite per  $x$  che tende a zero della funzione  $x/x$  è uguale a 1. In simboli:  $\lim_{x \rightarrow 0} x/x = 1$ . La prima considerazione importante è che mentre la funzione  $x/x$  non esiste per  $x=0$  esiste ed è uguale a 1 il suo limite per  $x \rightarrow 0$ . L'operatore che porta il calcolo del limite è chiamato passaggio a limite. Possiamo quindi affermare che il limite per  $x \rightarrow 0$  di  $x/x$  è uguale a 1 oppure che 1 è il risultato del passaggio a limite per  $x$  che tende a zero di  $x/x$ . Un'ulteriore considerazione è quella di far comprendere l'eccezionale ruolo espresso dal punto di accumulazione il quale è riuscito attraverso la sua forza logica a rendere determinato il risultato di un calcolo affidato ad una  $x$  che ha perso la sua dote di razionalità come sottolineato nell'aspetto precedente.

E' molto significativo concentrare l'attenzione sul fatto che entrambi gli esempi portati possono essere generalizzati estendendo il concetto di punto di accumulazione al valore infinito come pure quello di limite. Si sottolinea come il caso in cui il punto di accumulazione sia l'infinito sia possibile eseguire solo l'operazione di passaggio al limite in quanto non è possibile far assumere alla  $x$  il valore infinito. Questa nota ha il significato di far comprendere come il passaggio al limite oltre che a superare una difficoltà di calcolo ha permesso di eseguire in alcuni casi calcoli irrealizzabili senza il suo apporto. Volendo fornire del passaggio al limite un modello analiticamente corretto possiamo affermare: la funzione  $f(x)$  ammette limite  $l$  (finito o infinito) per  $x$  che tende a  $c$  (finito o infinito) se per ogni  $x$  appartenente all'intorno di  $c$  vi è in corrispondenza il valore della funzione  $f(x)$  appartenente a un intorno di  $l$ . Come vedremo nell'unità didattica relativa alla derivata il calcolo del limite trova importante applicazione nel campo della fisica applicata e quindi della tecnologia.

Prima Riflessione: appare assolutamente evidente come il concetto di limite sia inserito in un'ambientazione priva di riferimenti razionali in senso deterministico, ciò grazie a concetti come piccolo a piacere, e tendere ma non assumere. Ciò esprime una terminologia più filosofica che matematica in senso tradizionale, ma proprio tale modo di porsi ha permesso alla matematica, alla scienza e alla tecnologia una accelerazione straordinaria nei confronti della sua produzione in genere. Tutto ciò non può far che riflettere ancora una volta sulla dimensione di dono espressa dal concetto di limite. La sua prerogativa di dono è manifestata da quella potenzialità non deducibile da processi razionali, ma che si sviluppa solo attraverso un'ispirazione di fede. Nel suddetto dono è ospitato un forte segnale di verità vera. Infatti l'esecuzione del limite porta ad un fidarsi di quella operosità intrinseca nella matematica. Tutto ciò è anche un atteggiamento di modestia e umiltà dell'uomo nei confronti di ciò che la sua logica naturale non è in grado di comprendere. Il maggior dono è quindi il risultato del limite che può essere visto come una sorta di premio che emergendo dalla irrazionalità logica assume dimensione razionale e quindi utilizzabile sul pianeta Terra. E' ancora la fede quindi che illumina il percorso umano dando la possibilità all'uomo di far passi da gigante nella direzione del bene comune. E' importante il riconoscere in Newton e Leibniz gli autori del concetto di limite in quanto entrambi avevano una visione spirituale della matematica e della fisica. Newton nello "Scolio generale" incluso nella seconda edizione dei Principia del 1712 dichiara che uno spirito sottilissimo che pervade i grossi corpi e che in essi si nasconde. Tale spirito sottilissimo può essere interpretato nel caso del limite con  $\varepsilon$  piccolo a piacere. Si può cogliere inoltre una analogia abbastanza evidente tra la gravitazione Newtoniana e il punto di accumulazione. Infatti entrambi usano una forza invisibile per attrarre; nel primo caso permettendo la vita sulla Terra e nel secondo la vita del limite e quindi di una matematica più evoluta.

Seconda Riflessione: non si può trascurare come contributo al concetto di limite dovuto alla geometria analitica cartesiana. Infatti senza il modello cartesiano quindi all'introduzione di retta dei numeri reali non potremmo fornire il concetto di intorno ordinato. Scende come l'opera dei tre grandi Cartesio, Newton e Leibniz esprima una sinergia che ha come fattore accomunante quello della fede cristiana grazie alla quale ci è consentito di vedere e vivere l'oltre.

Terza Riflessione: per la fondamentale importanza che assume il passaggio al limite sia a livello scientifico che come contributo al progresso in genere si ritiene opportuno promuovere un ulteriore e significativa riflessione che conduce a una dimensione miracolistica dell'operatore suddetto. Infatti anche se l'intero edificio matematico rappresenta comunque un mistero per la comprensione prima in quanto non risponde alla domanda perché?, esso rimane spesso come in sottovoce al punto tale che per gli spiriti meno sensibili pare che tale mistero taccia. Nel caso dell'operatore di limite, tale mistero, urla attraverso la straordinarietà, quindi soltanto coloro che hanno grossi difetti di udito sia naturali che causati dal volersi tappare le orecchie, non sono in grado di coglierlo. In termini più analitici tale comportamento miracolistico è espresso dall'incomprensione razionale del come avvenga il meccanismo nella sua fase definitiva che conduce al calcolo del limite il cui risultato appare ed è corretto. Risulta significativo il modello della staffetta: è come se l'impostazione dell'operazione di limite risponda a un passaggio di testimone fra corridori di una stessa corsa, mentre il risultato del limite corrisponde all'ultimo corridore il quale ha caratteristiche atletiche completamente diverse e superiori dai precedenti riuscendo infatti a tagliare la linea del traguardo (il limite) che solo lui può fare. Questo modello vuole sottolineare una compartecipazione tra uomo e Dio nel raggiungere il risultato espresso dal limite. Tutto questo rientra in una visione finalistica ed eidetica che ha come motivazione prima la volontà di Dio che attraverso l'aiuto dell'amore misericordioso rende partecipe l'uomo potenziandolo, del proprio cammino storico. In sintesi l'uomo imposta l'operazione di limite suggerita comunque da Dio mentre il risultato è Dio stesso che lo rende possibile seguendo il modello: se l'uomo si fida di Dio e ascolta i suoi suggerimenti Dio realizza la sua crescita. Riportiamo un brano dalla prima lettera ai Corinti di San Paolo 12,4-9: Poiché c'è bensì diversità di doni, ma lo spirito è il medesimo; come c'è diversità di ministeri, ma il medesimo Signore; e diversità di operazioni, ma il medesimo Dio, che opera tutto in tutti. La manifestazione dello spirito è data a ciascuno per l'utilità comune. Infatti dallo Spirito ad uno è dato del linguaggio della sapienza; ad un altro il linguaggio della scienza, però secondo il medesimo spirito. Ancora dal 12,11: or, tutte queste cose le compie un solo e un medesimo spirito, distribuendole a ciascuno in particolare secondo vuole. In questo passo evangelico risiede la comprensione come il dono del limite concesso ai soli Newton e Leibniz sia comunque dedicato al bene comune. Quindi il limite è un dono ecumenico.

